

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Pada umumnya, turunan dari suatu fungsi memiliki orde bilangan asli. Kalkulus fraksional membahas mengenai integral dan turunan dengan orde fraksional.. Persamaan diferensial yang mengandung turunan fraksional disebut persamaan diferensial fraksional (Podlubny, 1999, p. 42). Kalkulus fraksional menjadi sangat populer dan dapat diterapkan di berbagai bidang seperti aliran fluida, viskoelastisitas, viskositas (Rusyaman *et al.*, 2022), ekonomi (Johansyah *et al.*, 2022a, 2022b), keuangan (Fall *et al.*, 2019), dan model penyebaran penyakit (Indah *et al.*, 2022). Salah satu penyakit yang dipelajari model penyebarannya yaitu penyakit campak.

Penyakit campak merupakan penyakit infeksi virus akut serius yang sangat menular. Campak disebabkan oleh *Paramyxovirus* dan ditularkan terutama melalui udara (*airborne*) (Alam dan Iriani, 2019). Penyakit ini dapat menyerang siapa saja tanpa mengenal jenis kelamin maupun usia. Namun, penyakit ini lebih banyak menyerang anak-anak daripada orang dewasa. Penyakit campak yang juga dikenal sebagai morbili atau *measles* ini memiliki gejala berupa demam tinggi, bercak kemerahan pada kulit disertai dengan batuk, pilek, dan mata merah (konjungtivitis). Untuk mencegah penyakit campak, semua institusi kesehatan menganjurkan anak-

anak untuk mendapatkan vaksin campak. Selain mendapatkan vaksin campak, karantina juga dapat dilakukan untuk mencegah penyakit campak (Aldila dan Asrianti, 2019).

Pada tahun 1980, sebelum imunisasi dilakukan secara luas diperkirakan lebih dari 20 juta orang di dunia terkena campak dengan 2,6 juta kematian setiap tahun yang sebagian besar adalah anak-anak dibawah usia lima tahun. Sejak tahun 2000, lebih dari satu miliar anak di negara-negara berisiko tinggi telah divaksinasi melalui program imunisasi, sehingga pada tahun 2012 kematian akibat campak telah mengalami penurunan sebesar 78% secara global. Indonesia merupakan salah satu dari negara-negara dengan kasus campak terbanyak di dunia (Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, 2018). Banyak peneliti yang telah melakukan penelitian mengenai model matematika untuk penyebaran penyakit campak. Model matematika epidemiologi berguna untuk mengusulkan dan menguji teori, serta untuk membandingkan, merencanakan, melaksanakan, dan mengevaluasi berbagai program deteksi, pencegahan, terapi, ataupun kontrol..

Pada tahun 1927, Kermack dan McKendrick merumuskan model matematika untuk penyebaran penyakit. Dalam model matematika yang dirumuskannya tersebut populasi total dibagi ke dalam tiga kompartemen, yaitu *Susceptible* (S), *Infected* (I), dan *Recovered* (R). *Susceptible* adalah banyaknya individu sehat yang rentan terinfeksi penyakit. *Infected* adalah banyaknya individu yang telah terinfeksi penyakit dan dapat menularkan penyakit kepada individu sehat yang rentan. *Recovered* adalah banyaknya individu yang telah sembuh dan akan kebal terhadap penyakit sehingga tidak akan terinfeksi penyakit kembali.

Terdapat beberapa penyakit yang memiliki periode laten, yaitu adanya selang waktu saat individu sudah terinfeksi hingga munculnya suatu penyakit. Jika suatu penyakit memiliki periode laten, maka terdapat kompartemen *Exposed* (E) pada model penyebaran penyakit tersebut, yaitu banyaknya individu yang terjangkit virus. Penyakit campak merupakan salah satu contoh penyakit yang memiliki periode laten, sehingga terdapat kompartemen *Exposed* (E) pada model penyebaran penyakitnya dan akan membentuk model *Susceptible Exposed Infected Recovered* (SEIR). Para peneliti telah banyak membahas mengenai model penyebaran penyakit diantaranya model penyakit campak SVEIR (Ahaya *et al.*, 2020), model COVID-19 SVEIR (Nainggolan, 2021), model penyakit tuberculosis SEIR (Das *et al.*, 2021), model penyakit campak SIHR (Fakhruddin *et al.*, 2020), dan model COVID-19 SEIYZZQ (Anggriani *et al.*, 2022).

Telah banyak penelitian yang membahas mengenai model matematika fraksional penyebaran penyakit campak. Abdullah *et al.* (2018) membahas model penyebaran penyakit campak SEIR dengan turunan Caputo dan penyelesaian numerik menggunakan *Gorenflo-Mainardi-Moretti-Paradisi scheme*. Farman *et al.* (2018) membahas model penyebaran penyakit campak SEIR dengan turunan Caputo dan penyelesaian numerik menggunakan metode dekomposisi Adomian *Laplace* serta metode transformasi diferensial. Almeida *et al.* (2019) membahas model penyebaran penyakit campak SEIR dengan turunan Caputo, dan penyelesaian numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton.

Bashir *et al.* (2019) membahas model penyebaran penyakit campak SIRV dengan turunan Caputo dan penyelesaian numerik menggunakan metode Adams-

Bashforth-Moulton. Qureshi (2020a) membahas model penyebaran penyakit campak SEIR dengan turunan Atangana-Baleanu-Caputo dan penyelesaian numerik menggunakan *numerical scheme*. Qureshi (2020b) membahas model penyebaran penyakit campak SEIR dengan turunan Caputo dan penyelesaian numerik menggunakan *Adams technique*.

Nazir *et al.* (2020) membahas model penyebaran penyakit campak SVEIR dengan turunan Caputo-Fabrizio dan penyelesaian numerik menggunakan metode dekomposisi Adomian *Laplace*. Aguegboh *et al.* (2020) membahas model penyebaran penyakit campak SEIR dengan turunan Caputo dan penyelesaian numerik menggunakan metode Adams Bashforth. Kumar *et al.* (2021) membahas model penyebaran penyakit campak SEIR dengan turunan Caputo dan penyelesaian numerik menggunakan metode polinomial Genocchi serta metode Adams-Bashforth-Moulton.

Qureshi dan Jan (2021) membahas model penyebaran penyakit campak SVIR dengan turunan Caputo dan penyelesaian numerik menggunakan metode Adams Bashforth. Ogunmiloro *et al.* (2021) membahas model penyebaran penyakit campak SVIHR dengan turunan Atangana-Baleanu-Caputo dan penyelesaian numerik menggunakan *novel iterative technique*. Abboubakar *et al.* (2022) membahas model penyebaran penyakit campak SVEIHR dengan turunan Caputo dan penyelesaian numerik menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton.

Pada tugas akhir ini penulis membahas mengenai penerapan persamaan diferensial fraksional pada model SEIR penyebaran penyakit campak dengan turunan Caputo. Penulis akan memodifikasi model SEIR dan menambahkan

asumsi-asumsi sehingga diperoleh model *Susceptible Vaccinated Exposed Infected Quarantined Recovered* (SVEIQR). Metode dekomposisi Adomian *Laplace* digunakan untuk mencari solusi numeriknya. Metode tersebut merupakan kombinasi dari metode dekomposisi Adomian dengan transformasi *Laplace* yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linear maupun non-linear.

1.2 Identifikasi Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, identifikasi masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana model persamaan diferensial fraksional SVEIQR dari penyebaran penyakit campak?
2. Bagaimana analisis model persamaan diferensial fraksional SVEIQR dari penyebaran penyakit campak?
3. Bagaimana solusi dan simulasi numerik model persamaan diferensial fraksional SVEIQR dari penyebaran penyakit campak?

1.3 Batasan Masalah

Batasan yang digunakan dalam penelitian ini yaitu :

1. Turunan fraksional yang digunakan adalah turunan Caputo.
2. Model matematika yang digunakan yaitu menggunakan model *Susceptible Vaccinated Exposed Infected Quarantined Recovered*.

3. Analisis model yang dilakukan adalah membuktikan eksistensi dan ketunggalan solusi, menentukan titik ekuilibrium non-endemik dan endemik, rasio reproduksi dasar, dan kestabilan titik ekuilibrium non-endemik.
4. Solusi numerik sistem persamaan diferensial fraksional pada model diselesaikan dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian *Laplace* sampai dengan tiga iterasi karena keterbatasan penghitungan.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Memperoleh model persamaan diferensial fraksional SVEIQR dari penyebaran penyakit campak.
2. Mendapatkan hasil dari analisis model persamaan diferensial fraksional SVEIQR penyebaran penyakit campak.
3. Memperoleh solusi dan simulasi numerik model persamaan diferensial fraksional SVEIQR dari penyebaran penyakit campak.

1.5 Kegunaan Penelitian

Penulisan tugas akhir ini diharapkan dapat berguna bagi pembaca maupun penulis, sebagai berikut :

1. Model persamaan diferensial fraksional SVEIQR dari penyebaran penyakit campak dapat digunakan untuk memahami dinamika penyebaran penyakit campak.

2. Hasil analisis model persamaan diferensial fraksional SVEIQR penyebaran penyakit campak dapat digunakan untuk memahami pembuktian eksistensi dan ketunggalan solusi dari suatu model persamaan diferensial fraksional.
3. Memahami penggunaan transformasi *Laplace* dalam pencarian solusi model persamaan diferensial fraksional.
4. Hasil simulasi numerik model persamaan diferensial fraksional SVEIQR penyebaran penyakit campak dapat digunakan untuk memahami perbedaan model penyebaran penyakit dengan orde fraksional .

1.6 Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian adalah studi literatur. Berikut merupakan langkah-langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan dalam penelitian ini :

1. Studi literatur

Pada tahap ini penulis menentukan permasalahan yang akan dibahas. Penulis melakukan studi literatur dengan mengumpulkan dan mempelajari literatur yang berhubungan dengan permasalahan tugas akhir ini. Bahan-bahan serta data-data dicari dari berbagai sumber, seperti buku, jurnal, artikel, internet, maupun tugas akhir yang membahas mengenai model SEIR dan turunan fraksional.

2. Pemodelan matematika

Pada tahap ini penulis memodifikasi model penyebaran penyakit campak yang digunakan menjadi model *Susceptible Vaccinated Exposed Infected*

Quarantined Recovered. Penulis menerapkan turunan fraksional pada model yang didapat sehingga diperoleh model persamaan diferensial fraksionalnya.

3. Analisis model

Pada tahap ini penulis melakukan analisis terhadap model persamaan diferensial fraksional yaitu membuktikan eksistensi dan ketunggalan solusi dari sistem persamaan diferensial fraksional pada model, mencari titik ekuilibrium pada kondisi non-endemik dan endemiknya, mencari rasio reproduksi dasar, dan analisis kestabilan titik ekuilibrium non-endemik.

4. Simulasi numerik

Pada tahap ini penulis melakukan simulasi numerik dengan bantuan *software* Maple 2018. Solusi numerik untuk model persamaan diferensial fraksional diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian *Laplace*.

5. Penafsiran dan kesimpulan

Pada tahap ini penulis melakukan penafsiran dari grafik yang diperoleh dan kemudian mengambil kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

BAB I – PENDAHULUAN

Bab ini berisi mengenai gambaran umum dalam penulisan skripsi yang meliputi latar belakang, identifikasi masalah, batasan masalah, maksud dan tujuan penelitian, kegunaan penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II – LANDASAN TEORI

Bab ini berisi mengenai teori dasar yang digunakan dalam penulisan skripsi yang meliputi turunan fraksional, persamaan diferensial fraksional, penyakit campak, model matematika epidemiologi, nilai eigen dan vektor eigen, matriks Jacobian, invarian positif, titik ekuilibrium dan kestabilan, rasio reproduksi dasar, fungsi khusus, integral Volterra, ruang metrik dan ruang norm, teorema titik tetap Banach, dan metode dekomposisi Adomian.

BAB III – OBJEK DAN METODE PENELITIAN

Bab ini berisi mengenai objek yang diteliti, metode yang digunakan dalam penelitian, dan alur penelitian.

BAB IV – HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi mengenai asumsi, model SVEIQR dan turunan fraksionalnya, analisis model, dan simulasi numerik dari model.

BAB V – SIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi mengenai simpulan dari pembahasan skripsi dan saran untuk pengembangan selanjutnya.